NOCIONES BÁSICAS DE LA *GEOMETRÍA ANALÍTICA*

CONTENIDO

1 Sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas 2

2 Coordenadas cartesianas de un punto 3

3 Distancia entre dos puntos 4

3.1 Ejercicios 5

4 Área del triángulo 11

4.1 Ejercicios 12

4.2 Condición para que tres puntos estén alineados 13

5 División de un segmento de recta en partes proporcionales 14

5.1 Ejercicios 15

5.2 Punto medio de un segmento de recta 17

6 Ejercicios 17

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Nociones Básicas de la *Geometría Analítica*.

La ***Geometría Analítica*** es el estudio o tratamiento analítico de la geometría, y por primera vez fue presentado por ***René Descartes*** en su libro llamado ***Géometrie*** que se publicó en el año de 1637. En esta obra, se establecía la relación explícita entre las curvas y las ecuaciones y podemos decir, que además de ***Descartes***, todos los matemáticos de los siglos **XVII** y **XVIII**, contribuyeron de una forma o de otra, al desarrollo de esta nueva teoría, que en la actualidad se estudia con el nombre de ***Geometría Analítica***, y que se fundamenta en el uso de ***Sistemas de Coordenadas Rectangulares*** o ***Cartesianas*** en honor de su fundador.

La ***Geometría Analítica*** es una parte de las matemáticas que, entre otras cosas, se ocupa de resolver algebraicamente los problemas de la geometría.

En esta materia se puede conocer una ecuación y poder deducir su gráfica, o también conocer la gráfica de una curva y determinar su ecuación. A estos dos problemas se les conoce como los ***Problemas Fundamentales*** de la ***Geometría Analítica***.

1 Sistema de coordenadas *rectangulares* o *cartesianas*.

En forma general se dice que la posición de un lugar cualquiera sobre la superficie de la tierra se identifica conociendo la ***latitud*** y ***longitud*** de ese lugar, esto es, un ***Sistema de Coordenadas***.

Durante el desarrollo del curso, se describen los sistemas de coordenadas ***cartesianas*** o ***rectangulares*** y las ***polares***, para la localización de puntos. Esto nos crea la necesidad de establecer el procedimiento que permitirá ubicar la posición de un punto cualquiera. Empezaremos por el ***Sistema de Coordenadas Rectangulares*** o ***Cartesianas***, el cual se describe a continuación.

Este sistema está formado por dos ***rectas*** o ***ejes***, perpendiculares entre sí, generalmente un ***eje*** es ***horizontal*** y el otro ***vertical***, que al intersectarse forman ***ángulos rectos*** y dividen al plano donde están contenidos en **cuatro** partes llamados ***cuadrantes***, las cuales se enumeran en el sentido contrario de las manecilla del reloj, como se muestra en la ***Figura 1***.

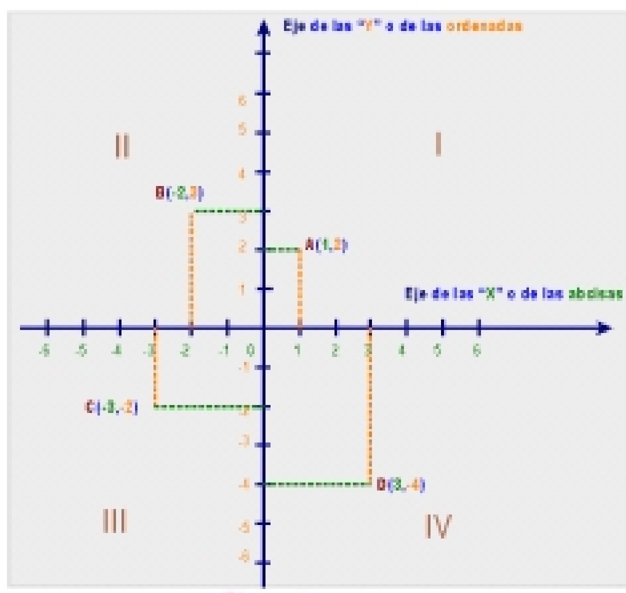

Figura 1

Sobre los ***ejes*** se marcan divisiones que corresponden a *números enteros*, siendo el ***cero*** el punto de intersección de dichos ejes llamado ***Origen*** de las ***Coordenadas***.

Considerando que cada ***eje*** es una recta numérica que contienen todos los números reales en forma creciente de ***izquierda*** a ***derecha*** en el ***eje horizontal*** y de ***abajo*** a ***arriba*** en el eje ***vertical***, es decir todos los números ***positivos*** están a la ***derecha*** y **arriba** del ***origen*** y los *negativos* a la ***izquierda*** y ***abajo*** del mismo ***origen***.

Al eje ***horizontal*** se le llama ***eje*** de las ***X*** o de las ***Abscisas***, y al eje ***vertical*** de las ***Y*** o de las ***Ordenadas***.

Para la ubicación de un punto cualquiera en el plano se consideran las distancias a los ejes, que son sus ***Coordenadas***. La distancia de un punto al eje de las ***Y*** es su ***Abscisa*** y la distancia al eje de las ***X*** es su ***ordenada***. Las ***Abscisas*** se representan por la letra ***X*** y las ***Ordenadas*** por la letra ***Y***, es decir que las ***coordenadas*** de un punto ***P*** son ***P(X, Y)***, las cuales se anotan como parejas ordenadas dentro de un paréntesis y separadas por una coma.

2 Coordenadas *cartesianas* de un punto.

Se ha visto que al poner en movimiento a un ***punto*** nos engendra una **línea**, la cual al ponerse en movimiento engendra una ***superficie***, y ésta a su vez, al ponerse también en movimiento engendra un ***volumen***, se puede concluir que todas las figuras geométricas tienen como base de formación el ***punto***.

Para su estudio, cuando menos por ahora, utilizaremos el ***Sistema Cartesiano de Ejes Rectangulares***. Dentro de éste convendremos en que siempre que se hable de un punto conocido o de posición fija, designaremos sus ***coordenadas*** por las letras ***x*** y ***y*** con índices, mientras que siempre que se trate de un ***punto*** móvil o de posición desconocida sus ***coordenadas*** serán simplemente ***x*** y ***y*** sin índices.

Por ejemplo (Ver ***Figura 2***), si tenemos una ***circunferencia*** de ***radio*** conocido, referida a un sistema de ejes, su ***centro*** es un punto conocido, de manera que al referirnos a él podemos decir, el punto ***C***(x_1, y_1), en tanto que si suponemos que esta ***circunferencia*** es descrita por el extremo libre del compás, dicho extremo es un punto cuyas ***coordenadas*** cambian para cada posición, de tal manera que al mencionarlo podemos decir, el punto ***M(x, y)***

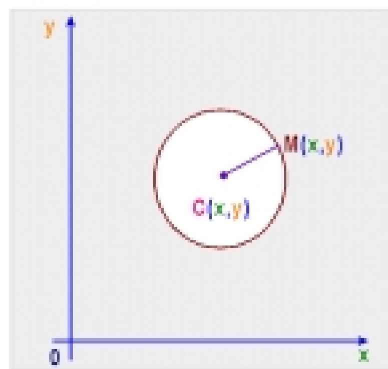

FIGURA 2

Ejemplo: **Trazar** un ***sistema de coordenadas rectangulares*** y señalar los ***puntos*** siguientes: **A(4,3),B(-1,5),C(-3,-2),D(6,-4)** y **trazar** además, el ***segmento de recta*** que une los puntos **E(-3,-1)** con **F(5,6)**.

SOLUCIÓN

La ***Figura 3*** muestra la ubicación gráfica de los ***puntos*** dados, así como la ***recta*** pedida.

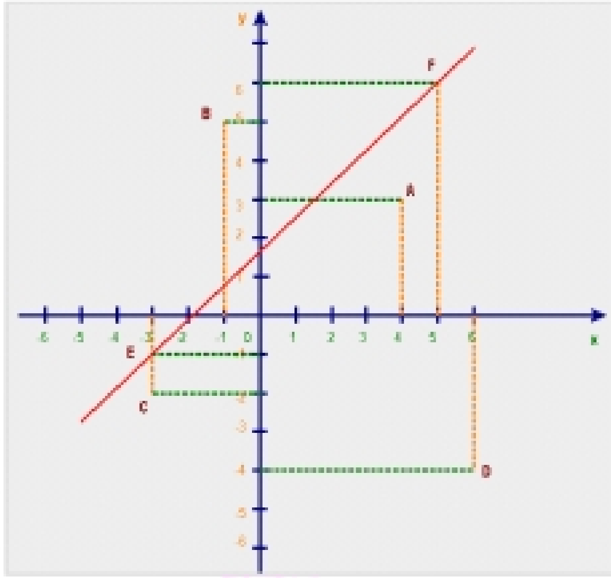

FIGURA 3

3 *Distancia* entre dos puntos.

Vamos a determinar una fórmula mediante la cual podamos calcular, en todos los casos, la ***distancia entre dos puntos*** de ***coordenadas*** conocidas. ***A(x_1, y_1)*** y ***B(x_2, y_2)*** los representamos en el sistema de coordenadas, trazamos las ***perpendiculares*** $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ al eje de las ***x*** y $\overline{EF}$ al eje de las ***y***. Así mismo, trazamos el ***segmento*** $\overline{AB}$ para obtener el ***triángulo*** ***ABE***. La gráfica se muestra en la ***Figura 4***.

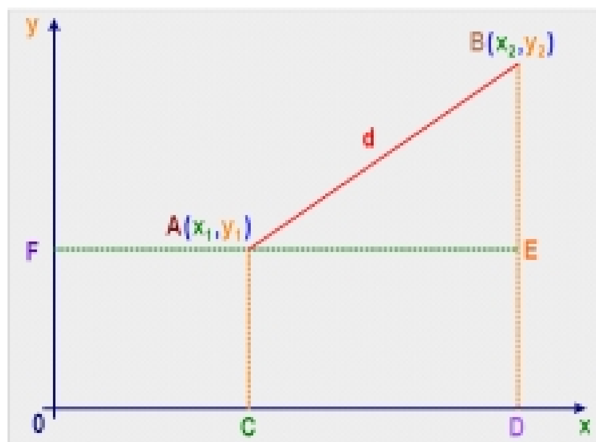

FIGURA 4

De la ***figura*** anterior, se tiene:

$$\overline{OC} = x_1 \ , \ \overline{CA} = y_1$$

$$\overline{OD} = x_2 \ , \ \overline{DB} = y_2$$

Si aplicamos el teorema de **Pitágoras** al triángulo rectángulo ***ABE*** de la ***Figura 4***, obtenemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \qquad \text{..........(1)}$$

Pero:

$$\overline{AB} = d$$

Y:

$$\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = x_2 - x_1$$
$$\overline{EB} = \overline{DB} - \overline{DE} = \overline{DB} - \overline{CA} = y_2 - y_1$$

Sustituyendo en **(1)**:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos:

$$d = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{.......................................} \textbf{(I)}$$

Que es la ***fórmula*** para obtener la ***distancia entre dos puntos*** de coordenadas conocidas. Esta igualdad, es posible expresarla en la siguiente forma, porque cualquiera que sea la diferencia, está elevada al cuadrado y el cuadrado de la diferencia de dos números no varía cuando se invierte el orden de la resta.

$$d = \pm\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{......................................} \textbf{(I')}$$

Ambas fórmulas, se leen. La ***distancia entre dos puntos*** es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la diferencia de las ***abscisas***, más el cuadrado de la diferencia de las ***ordenadas***.

Respecto al doble signo del radical, tomamos la raíz cuadrada positiva porque nos interesa únicamente la magnitud del segmento y ésta es positiva.

Para resolver un problema, se recomienda para todos los casos, se grafiquen los datos disponibles antes de hacer operaciones.

3.1 EJERCICIOS

1. **Calcular** la ***distancia*** entre los ***puntos***: ***A(-3,2)*** y ***B(1,-1)***.

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula **(I)**, la ***distancia*** entre **dos** ***puntos***, tenemos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2. **Calcular** la ***distancia*** entre los ***puntos***: ***P(6,5)*** y ***Q(-7,-3)***.

SOLUCIÓN

Según la fórmula **(I)**, se obtiene:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(6+7)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{169+64} = \sqrt{233} = 15.26$$

3. **Calcular** el ***perímetro*** del ***triángulo*** cuyos ***vértices*** son: ***A(-4,6)***, ***B(6,2)*** y ***C(4,-4)***.

SOLUCIÓN

Sustituyendo valores en la expresión **(I)**, en cada caso se tiene:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4-6)^2+(6-2)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}=10.77$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(-4-4)^2+(6+4)^2}=\sqrt{64+100}=\sqrt{164}=12.80$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(6-4)^2+(2+4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=6.32$$

Por tanto, por conocimientos previos sabemos que:

$$\textbf{Perímetro}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=\textbf{29.89 unidades lineales}$$

4. **Determinar** todos los ***puntos*** que, además de ***distar*** **5** unidades del ***punto A(1,2)***, ***disten*** **2** unidades del eje de las ***x***.

SOLUCIÓN

Suponiendo que, por lo menos, haya un ***punto Q(x, y)*** que satisfaga las condiciones del enunciado, se tendrá de acuerdo a la ***Figura 5***, aplicando la fórmula de la ***distancia entre dos puntos*** que:

Sustituyendo datos en la fórmula **(I)**, se tiene:

$$\overline{QA}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=5$$

Elevando al cuadrado, se obtiene:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25 \qquad \textbf{(1)}$$

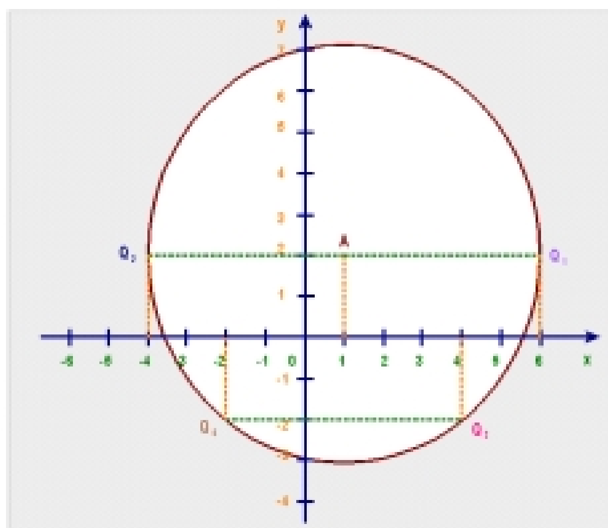

FIGURA 5

Pero como la distancia del punto ***Q*** al eje de las ***x*** debe ser de **2** unidades, dicha distancia no es más que la ordenada del punto ***Q***, la que puede ser positiva o negativa, por lo que estamos en obligación de considerar los dos signos y hacer las correspondientes sustituciones en la ecuación **(1)**

Para ***y* = 2**, tenemos:

$$(x-1)^2+(2-2)^2=25$$

Por tanto:

$$(x-1)^2=25$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros:

$$x - 1 = \pm\ 5$$

De la expresión anterior, se obtiene:

$$x_1 - 1 = 5.\ \text{De donde}: \ \mathbf{x_1 = 6}$$
$$x_2 - 1 = -5.\ \text{De donde}: \ \mathbf{x_2 = -4}$$

Así, los **dos** primeros ***puntos*** que resuelven nuestro problema, son:

$$\mathbf{Q_1(6,2)\ ;\ Q_2(-4,2)}$$

De la misma manera, ahora para ***y* = -2**, tenemos:

$$(x-1)^2 + (-2-2)^2 = 25$$
Por tanto:
$$(x-1)^2 = 25 - 19 = 9$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros:

$$x - 1 = \pm\ 3$$

De la expresión anterior, se obtiene:

$$x_3 - 1 = 3.\ \text{De donde}: \ \mathbf{x_3 = 4}$$
$$x_4 - 1 = -3.\ \text{De donde}: \ \mathbf{x_4 = -2}$$

Por consiguiente, otras dos soluciones del problema están dadas por los puntos:

$$\mathbf{Q_3(4,-2)\ ;\ Q_4(-2,-2)}$$

5. Determinar el ***centro*** de la ***circunferencia*** que pasa por los ***puntos***: ***P(-2,8)***, ***Q(2,4)*** y ***R(4,-6)***.

SOLUCIÓN

Llamaremos ***C(x, y)*** al ***centro*** y tomaremos en cuenta que ***equidista*** de los ***puntos*** dados, por lo cual debe de tenerse:

$$\mathbf{\overline{CP} = \overline{CQ}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1)}$$
$$\mathbf{\overline{CQ} = \overline{CR}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(2)}$$

Y según la fórmula **(I)**, podemos escribir:

$$\overline{CP} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-8)^2}$$
$$\overline{CQ} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$
$$\overline{CR} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+6)^2}$$

Sustituyendo los valores dados, de acuerdo a las igualdades **(1)** y **(2)** En **(1)**:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$$

Elevando al cuadrado, desarrollando y simplificando, se tiene:

$$x^2+4x+4+y^2-16y+64=x^2-4x+4+y^2-8y+16$$
$$x-8y=-48$$

Dividiendo entre **8** y despejando a ***y***, se obtiene:

$x-y=-6.$ Por tanto: $\mathbf{y=x+6}$ ....**(3)**

Siguiendo los pasos anteriores. En **(2)**:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+6)^2}$$
$$x^2-4x+4+y^2-8y+16=x^2-8x+16+y^2+12y+36$$
$$4x-20y=32$$

Dividiendo entre **4**:

$\mathbf{x-5y=8}$ ....**(4)**

Sustituyendo **(3)** en **(4)**:

$$x-5(x+6)=8$$
$$x-5x-30=8$$
$$-4x=38$$

Despejando a ***x***:

$$\mathbf{x=\frac{38}{-4}=\frac{-19}{2}}$$

Sustituyendo ***x*** en **(3)**:

$$\mathbf{y=\frac{-19}{2}+\frac{12}{2}=-\frac{7}{2}}$$

Por tanto, el ***centro*** es:

$$\mathbf{C\left(-\frac{19}{2},-\frac{7}{2}\right)}$$

6. **Demostrar** que los ***puntos*** ***A(1,-2)***, ***B(4,2)*** y ***C(-3,-5)*** son los ***vértices*** de un ***triángulo isósceles***.

SOLUCIÓN

Para que el triángulo sea ***isósceles*** debe tener dos lados iguales, razón por la que tendremos que calcular las longitudes de cada uno de los tres lados, que de acuerdo a la fórmula **(I)** se tiene:

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(1+3)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(4+3)^2+(2+5)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=9.89$$

Como los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ resultaron iguales, queda demostrado que los puntos dados son los ***vértices*** de un ***triángulo isósceles***.

7. **Determinar** los ***puntos*** cuyas ***distancias*** al ***punto P(2,3)*** son de **4** unidades y cuyas ***ordenadas*** son iguales a **5** (Ver ***Figura 6***)

SOLUCIÓN

Suponemos un sólo ***punto Q(x,5)***, cuya distancia al ***punto P*** debe ser igual a **4**. Por lo que, según la fórmula ***(I)*** tenemos:

$$\overline{QP}=\sqrt{(x-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+4}=4$$

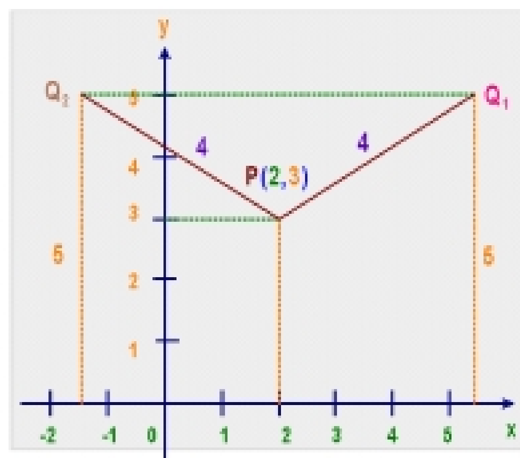

FIGURA 6

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$(x-2)^2+4=16$$
$$(x-2)^2=12$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros:

$$x-2=\pm\ 3.46$$

Se tienen **dos** valores de ***x*** que satisfacen la ecuación anterior, cuyos valores son:

$$x_1-2=\ 3.46,\text{ por tanto: }\mathbf{x_1=\ 5.46}$$
$$x_2-2=-3.46,\text{ por tanto: }\mathbf{x_2=-1.46}$$

Los **dos** ***puntos*** solicitados son:

$$\mathbf{Q_1(5.46,5)\ \ y\ \ Q_2(-1.46,5)}$$

8. **Determinar** el ***centro*** de la ***circunferencia*** que pasa por los ***puntos***: ***P(0,0)***, ***Q(-3,3)*** y ***R(5,4)***

SOLUCIÓN

Considerando que ***C(x, y)*** es el ***centro*** y sabiendo que los ***puntos*** son ***equidistantes*** de éste, se tiene:

$\overline{CP} = \overline{CQ}$ .... **(1)**
$\overline{CP} = \overline{CR}$ .... **(2)**

Sustituyendo las ***coordenadas*** de los puntos dados en la fórmula **(I)**, se tiene:

$$\overline{CP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\overline{CQ} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2}$$
$$\overline{CR} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

Sustituyendo en **(1)** se obtiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$$

Simplificando:

$$6x - 6y = -18$$

Dividiendo entre **6**:

$$x - y = -3$$

Despejando a ***y***:

$\mathbf{y = x + 3}$ .... **(3)**

Sustituyendo en **(2)**, se obtiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$x^2 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

Simplificando:

$\mathbf{10x + 8y = 41}$ .... **(4)**

Sustituyendo **(3)** en **(4)**:

$$10x + 8(x+3) = 41$$
$$10x + 8x + 24 = 41$$
$$18x = 17$$
$$x = \frac{17}{18}$$

Sustituyendo ***x*** en ***(3)***:

$$y = \frac{17}{18} + \frac{54}{18} = \frac{71}{18}$$

Por tanto, el ***centro*** de la ***circunferencia*** es:

$$C\left(\frac{17}{18}, \frac{71}{18}\right)$$

4 *Área* del triángulo.

Vamos a deducir una fórmula que nos permita calcular el ***área de un triángulo*** conociendo las ***coordenadas*** de sus ***vértices***, de acuerdo a la ***Figura 7***:

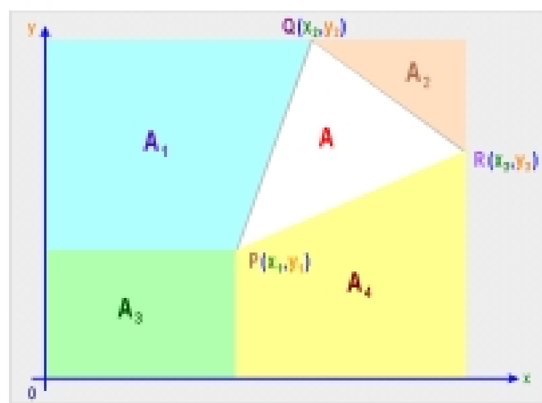

FIGURA 7

De la ***Figura 7***, se tiene la siguiente relación de ***áreas***:

$$A = A_T - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$

En donde:

A = Área del ***triángulo***
A_T = Área total del ***rectángulo*** de la figura
A_1 = Área del ***trapecio***
A_2 = Área del ***triángulo***
A_3 = Área del ***rectángulo***
A_4 = Área del ***trapecio***

Se sabe que el área del ***triángulo*** es $A = \frac{b\,h}{2}$, que la relación para obtener el área de un ***trapecio*** es $A = \frac{a+b}{2}h$ y la de un ***rectángulo*** es $A = b\,h$, por lo que:

$$A = x_3 y_2 - \frac{(x_1 + x_2)(y_2 - y_1)}{2} - \frac{(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)}{2} - x_1 y_1 - \frac{(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)}{2}$$

Multiplicando por **2**, desarrollando, simplificando y factorizando, se obtiene:

$$2A = 2x_3y_2 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 - x_3y_2 + x_3y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 - 2x_1y_1 - x_3y_1 - x_3y_3 + x_1y_1 + x_1y_3 =$$
$$= x_1y_3 - x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_1 = y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$$

Dividiendo entre **2**:

$$A = \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)] \quad \text{..........} \textbf{(II)}$$

Que es la relación que permite obtener el ***área de un triángulo*** en función de las ***coordenadas*** de sus ***vértices***.

Al aplicar esta fórmula, a veces el resultado es ***positivo*** y otras ***negativo***. En todos los casos se considerará el ***valor absoluto*** de dicho resultado.

Por procedimiento, que justificaremos más adelante, o por simple comprobación con esta fórmula, se ha obtenido el siguiente ***determinante*** para calcular el ***área del triángulo***, en función de las ***coordenadas*** de sus ***vértices***.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{..........} \textbf{(II')}$$

4.1 Ejercicios

1. Empleando las fórmulas **(II)** y ***(II')***, **calcular** el ***área del triángulo*** cuyos ***vértices*** son: ***P(-4,2)***, ***Q(5,4)*** y ***R(2,-3)***

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$A = \frac{1}{2}[2(5-2) + 4(2+4) + (-3)(-4-5)] =$$
$$= \frac{1}{2}(6 + 24 + 27) = \frac{1}{2}\, 57$$
$$A = 28.5\ u^2$$

Por el ***determinante***:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-15 - 16 + 4 - 10 - 8 - 12) = \frac{1}{2}(-57)$$

Como el ***área*** debe ser ***positiva***, se toma el ***valor absoluto***, obteniéndose:

$$A = 28.5\ u^2$$

2. **Calcular** el ***área del triángulo*** cuyos ***vértices*** son: ***P(-6,-6)***, ***Q(-2,8)***, ***R(4,2)***

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula **(II)**:

$$A = \frac{1}{2}\left[-6(-2-4)+8(4+6)+2(-6+2)\right] = \frac{1}{2}(36+80-8) = \frac{1}{2}108 = 54\ u^2$$

Aplicando el ***determinante***, fórmula **(II')**:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 1 & -2 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{matrix} = \frac{1}{2}(-4-48-24-12-32+12) = \frac{1}{2}(-108)$$

$$A = \left|-54\right| = 54\ u^2$$

3. **Calcular** el ***área del triángulo*** formado por los ***puntos P(-3,4)***, ***Q(5,3)*** y ***R(2,0)***

SOLUCIÓN

Por medio del ***determinante***, fórmula **(II')**:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \frac{1}{2}(0-9+8-20-6+0) = \frac{1}{2}(-27)$$

$$A = \left|-13.5\right| = 13.5\ u^2$$

Aplicando la fórmula **(II)**:

$$A = \frac{1}{2}\left[(4(5-2)+3(2+3)+0(-3-5)\right] = \frac{1}{2}(12+15+0) = \frac{1}{2}(27) = 13.5\ u^2$$

4.2 Condición para que tres puntos estén alineados

Para que **tres *puntos*** tales como: ***A(x_1, y_1)***, ***B(x_2, y_2)*** y ***C(x_3, y_3)*** estén en ***línea recta*** es indispensable, como es natural, que no puedan formar un ***triángulo***. Dicho de otra manera, se necesita que el ***área del triángulo*** que forman valga **cero**.

Por lo anterior, se concluye: Para que ***tres puntos estén alineados*** debe satisfacerse la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo: **Demostrar** que los ***puntos***: ***A(-1,-4)***, ***B(0,-1)*** y ***C(2,5)*** están situados sobre una misma ***línea recta***.

SOLUCIÓN

Obteniendo el ***área del triángulo*** formado por los ***puntos*** ***A***, ***B*** y ***C***, por medio del ***determinante***, se obtiene:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right. = 0 + 2 + 5 + 0 + 1 - 8 = \mathbf{0}$$

La ***Figura 8***, muestra la solución gráfica:

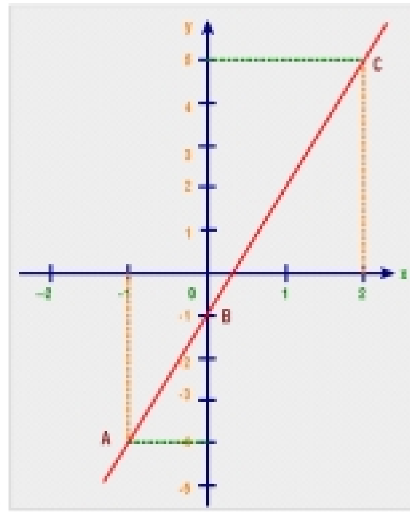

FIGURA 8

5 *División* de un segmento de recta en partes proporcionales.

Vamos a determinar las ***coordenadas*** de un ***punto*** que divida a un ***segmento de recta*** $\overline{AB}$ de extremos conocidos, en partes tales que guarden entre sí la ***relación*** $\frac{m}{n}$ (Ver ***Figura 9***)

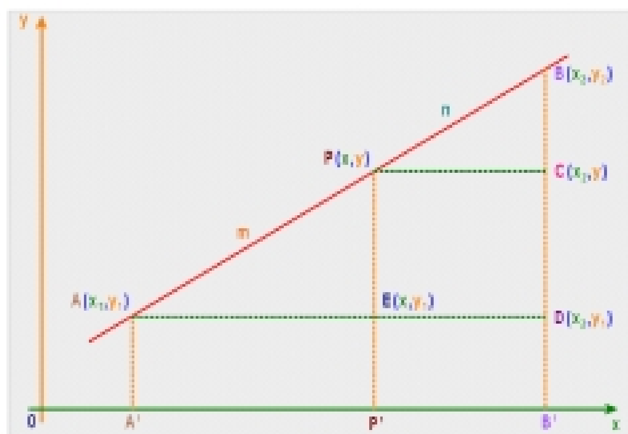

FIGURA 9

De acuerdo a la ***Figura 9***, consideramos el ***segmento*** $\overline{AB}$, en donde ***A*** como ***B*** son ***puntos*** cualesquiera y se designan con las ***coordenadas***:

$$A(x_1, y_1) \text{ y } B(x_2, y_2)$$

El ***punto*** que divide el ***segmento*** es ***P(x, y)*** y la ***proporción*** es $\frac{m}{n}$, debe aclararse que lo que se busca son las ***coordenadas*** del ***punto P***.

Los ***segmentos*** $\overline{A'P'}$ y $\overline{P'B'}$ guardan la misma ***relación*** que los ***segmentos*** $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, es decir:

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{P'B'}} = \frac{m}{n} \quad \text{...(1)}$$

Por otra parte:

$$\overline{OP'} = \overline{OB'} - \overline{P'B'} \quad \text{..} (2)$$

Pero:

$$\overline{OP'} = x, \ \overline{OB'} = x_2, \ \overline{OA'} = x_1$$

Y:

$$\overline{A'P'} = \overline{OP'} - \overline{OA'} = x - x_1$$

Despejando $\overline{P'B'}$ de la ecuación **(1)** y sustituyendo datos, se tiene:

$$\overline{P'B'} = \frac{n\,\overline{A'P'}}{m} = \frac{n(\overline{OP'} - \overline{OA'})}{m} = \frac{n(x - x_1)}{m} \qquad (3)$$

Sustituimos en la ecuación **(2)**:

$$x = x_2 - \frac{n(x - x_1)}{m}$$

Multiplicando ambos miembros por ***m*** y simplificando:

$$mx = mx_2 - nx + nx_1$$
$$mx + nx = nx_1 + mx_2$$
$$x(m + n) = nx_1 + mx_2$$

Despejando a ***x***:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \quad \text{..} \text{(III)}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para ***y***, se obtiene:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \quad \text{..} \text{(IV)}$$

Estas fórmulas nos permiten **determinar** un ***punto*** que divida a un ***segmento de recta*** en partes ***proporcionales***.

5.1 EJERCICIOS

1. Los ***extremos*** de un ***segmento de recta*** son: ***A(-3,-4)*** y ***B(4,2)***. **Determinar** sobre dicho ***segmento*** un ***punto*** que ***diste*** de ***A*** el ***doble*** que de ***B***.

SOLUCIÓN

Del enunciado del problema, se determina que la relación es: $\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$; es decir: ***m* = 2** y ***n*=1**.

Sustituyendo valores en las relaciones **(III)** y **(IV)** previas, se obtiene:

$$\mathbf{x}=\frac{1(-3)+2(4)}{2+1}=\frac{-3+8}{3}=\frac{5}{3}$$
$$\mathbf{y}=\frac{1(-4)+2(2)}{2+1}=\frac{-4+4}{3}=\frac{0}{3}=0$$

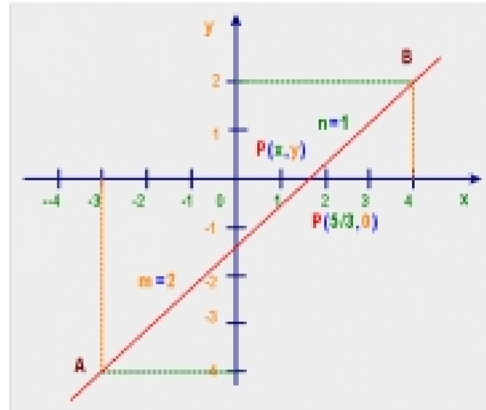

FIGURA 10

El ***punto*** pedido es:

$$\mathbf{P}\left(\frac{5}{3},0\right)$$

Para comprobar los resultados, se calcula las distancias de ***P*** a ***A*** y de ***P*** a ***B***, aplicando la fórmula **(I)**, correspondiente a la ***distancia*** entre dos puntos:

$$\overline{PA}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}+3\right)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{9}\right)^2+16}=\sqrt{\frac{196}{9}+\frac{144}{9}}=\sqrt{\frac{340}{9}}=\sqrt{\frac{4x85}{9}}=2\frac{\sqrt{85}}{3}$$

$$\overline{PB}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-4\right)^2+(0-2)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{12}{3}\right)^2+4}=\sqrt{\left(\frac{-7}{3}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{36}{9}}=\sqrt{\frac{85}{9}}=\frac{\sqrt{85}}{3}$$

De los resultados anteriores, se concluye que:

$$\overline{PA}=2\overline{PB}$$

La ***Figura 10*** muestra los resultados gráficamente:

2. Dado el ***segmento de recta*** cuyos extremos son ***A(-6,8)*** y ***B(4,-2)*** **Determinar** el ***punto*** que lo ***divide*** en la relación $\frac{2}{3}$, debiendo estar dicho ***punto*** más cerca de ***A*** que de ***B***.

SOLUCIÓN

Del enunciado, se determina que $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$. Sustituyendo valores en las expresiones **(III)** y **(IV)**, se obtiene:

$$x = \frac{(3)(-6) + (2)(4)}{2 + 3} = \frac{-18 + 8}{5} = -\frac{10}{5} = -2$$
$$y = \frac{(3)(8) + (2)(-2)}{2 + 3} = \frac{24 - 4}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

El *punto* es:

$$P(-2, 4)$$

Se deja al alumno comprobar los resultados obtenidos, realizando la gráfica correspondiente.

5.2 Punto medio de un segmento de recta.

Las fórmulas para calcular las ***coordenadas*** del ***punto medio*** de un ***segmento de recta***, se obtienen a partir de las expresiones **(III)** y **(IV)** vistas anteriormente, considerando que ***m*=*n***, en cuyo caso resulta:

Partiendo de:

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{m + n} \quad , \quad y = \frac{n y_1 + m y_2}{m + n}$$

Con ***m*=*n***, tenemos:

$$x = \frac{m x_1 + m x_2}{m + m} = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y = \frac{m y_1 + m y_2}{m + m} = \frac{m y_1 + m y_2}{2m} = \frac{m(y_1 + y_2)}{2m} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Resultando:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{...} \textbf{(V)}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \text{...} \textbf{(VI)}$$

Que son las fórmulas para obtener las ***coordenadas*** del ***punto medio*** de un ***segmento de recta*** de extremos conocidos.

6 EJERCICIOS

1. Encontrar el ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{PQ}$, sabiendo que: ***P*(-8,-6)** y ***Q*(4,2)**.

SOLUCIÓN

Aplicando las fórmulas **(V)** y **(VI)**, se tiene:

$$x_m = \frac{-8+4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$y_m = \frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Por tanto, el punto medio es:

$$M(-2,-2)$$

Se deja al alumno comprobar los resultados obtenidos, realizando la gráfica correspondiente.

2. Los ***vértices*** de un ***triángulo*** son: ***A(-4,2)***, ***B(2,8)*** y ***C(6,-6)***. **Calcular** la ***longitud*** de la ***mediana*** correspondiente al lado $\overline{BC}$ y además **demostrar** que el ***segmento de recta*** que se obtiene al ***unir los puntos medios de dos de sus lados mide la mitad del tercero***.

SOLUCIÓN

Las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{BC}$ son, según las ecuaciones **(V)** y **(VI)**:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$
$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8-6}{2} = 1$$

Por tanto, el ***punto medio*** de $\overline{BC}$ es:

$$M(4,1)$$

Aplicando la fórmula **(I)** para calcular la ***distancia*** entre los puntos ***A*** y ***M***, se tiene:

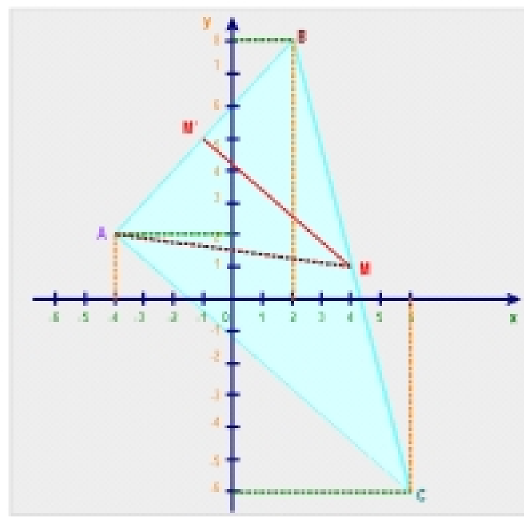

FIGURA 11

$$\overline{AM} = \sqrt{(-4-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} = 8.06$$

Que es la ***longitud*** de la ***mediana*** del lado $\overline{BC}$.

Las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{AB}$ son:

$$x_{M'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1$$
$$y_{M'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$$

Por tanto, el ***punto medio*** de $\overline{AB}$ es:

$$M'(-1,5)$$

La ***distancia*** del ***segmento*** $\overline{M'M}$ es:

$$\overline{M'M} = \sqrt{(-1-4)^2+(5-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{\mathbf{41}}$$

La ***distancia*** del lado $\overline{AC}$ es:

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4-6)^2+(2+6)^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{4 \times 41} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{41}}$$

De los resultados anteriores, se puede ver claramente que:

$$\overline{M'M} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Los resultados algebraicos están representados gráficamente en la ***Figura 11***.

3. **Tres** ***vértices*** consecutivos de un ***paralelogramo*** son: ***A(-6,2)***, ***B(-2,8)*** y ***C(4,-2)***. **Determinar** el **cuarto** ***vértice***:

SOLUCIÓN

Partimos del principio que establece que las dos ***diagonales*** de todo ***paralelogramo*** se cortan en un ***punto medio***. Por lo que, sustituyendo datos en las expresiones **(V)** y **(VI)** se tiene:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-6+4}{2} = \mathbf{-1}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-2}{2} = \mathbf{0}$$

Por tanto, las ***coordenadas*** del ***punto medio*** son:

$$\mathbf{M(-1,0)}$$

Pero también:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}$$

Sustituyendo los valores de x_M y x_B, se obtiene:

$$-1 = \frac{-2 + x_D}{2}$$

Despejando a x_D:

$$x_D = -2+2 = \mathbf{0}$$

Además:

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$

Sustituyendo los valores de ***y_M*** y ***y_B***, se obtiene:

$$0 = \frac{8 + y_D}{2}$$

Despejando a ***y_D***:

$$\mathbf{y_D} = 0 - 8 = \mathbf{-8}$$

Por lo que el **cuarto** ***vértice*** es:

$$\mathbf{D(0,-8)}$$

Como se comprueba en la ***Figura 12***.

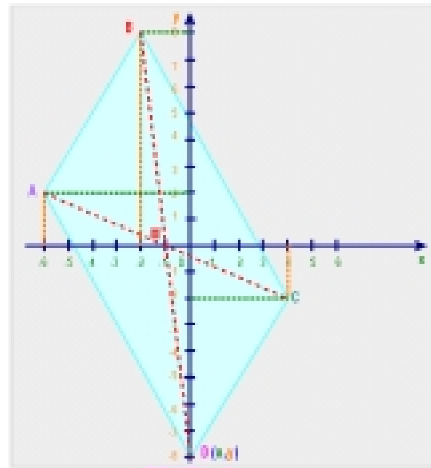

FIGURA 12

4. Los ***vértices*** de un ***cuadrilátero irregular*** son: ***A(-8,8)***, ***B(2,2)***, ***C(0,-2)*** y ***D(-4,-4)***. **Demostrar** que la ***figura*** resultante (***Figura 13***) al unir los ***puntos medios de sus lados consecutivos*** es un ***paralelogramo***.

SOLUCIÓN

Aplicando las fórmulas **(V)** y **(VI)**, las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{\mathbf{AB}}$ son:

$$\mathbf{x_{M_1}} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-8+2}{2} = \mathbf{-3}$$

$$\mathbf{x_{M_2}} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8+2}{2} = \mathbf{5}$$

El ***punto medio*** de $\overline{\mathbf{AB}}$ es:

$$\mathbf{M_1(-3,5)}$$

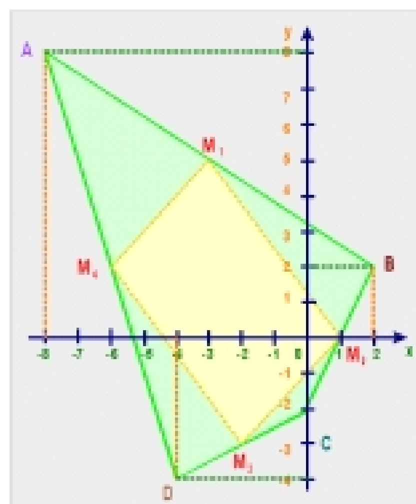

FIGURA 13

Las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{\mathbf{BC}}$ son:

$$\mathbf{x_{M_2}} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{y_{M_2}} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2-2}{2} = \mathbf{0}$$

El ***punto medio*** de $\overline{\mathbf{BC}}$ es:

$$\mathbf{M_2(1,0)}$$

Las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{\mathbf{CD}}$ son:

$$\mathbf{x_{M_3}} = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{0-4}{2} = -\mathbf{2}$$
$$\mathbf{y_{M_3}} = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-2-4}{2} = -\mathbf{3}$$

El ***punto medio*** de $\overline{\mathbf{CD}}$ es:

$$\mathbf{M_3(-2,-3)}$$

Las ***coordenadas*** del ***punto medio*** del ***segmento*** $\overline{\mathbf{AD}}$ son:

$$\mathbf{x_{M_4}} = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-8-4}{2} = \mathbf{-6}$$
$$\mathbf{y_{M_4}} = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{8-4}{2} = \mathbf{2}$$

El ***punto medio*** de $\overline{\mathbf{AD}}$ es:

$$\mathbf{M_4(-6,2)}$$

Aplicando la fórmula **(I)** de la ***distancia*** entre ***dos puntos***:

$$\overline{\mathbf{M_1 M_2}} = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{\mathbf{41}}$$
$$\overline{\mathbf{M_4 M_3}} = \sqrt{(-6+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{\mathbf{41}}$$
$$\overline{\mathbf{M_4 M_1}} = \sqrt{(-6+3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{\mathbf{18}}$$
$$\overline{\mathbf{M_3 M_2}} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{\mathbf{18}}$$

De los resultados anteriores, se observa que:

$$\overline{\mathbf{M_1 M_2}} = \overline{\mathbf{M_4 M_3}} \quad \text{y} \quad \overline{\mathbf{M_4 M_1}} = \overline{\mathbf{M_3 M_2}}$$

Como resultaron ***iguales*** los ***lados opuestos***, la ***Figura 13*** es un **paralelogramo**.

5. La ***base*** de un ***triángulo isósceles*** tiene por extremos los ***puntos*** ***A(2,-1)*** y ***B(-1,2)***; los ***lados iguales*** miden cada uno $\sqrt{\mathbf{17}}$. **Encontrar** el ***vértice opuesto a la base***.

SOLUCIÓN

Considerando que el ***vértice opuesto*** es ***C(x, y)***:

Por medio de la fórmula **(I)** de la ***distancia*** entre ***dos puntos***, para el ***segmento*** $\overline{\mathbf{CB}}$, se tiene:

$$\overline{\mathbf{CB}}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{\mathbf{17}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=17$$

Reduciendo términos semejantes:

$\mathbf{x^2+y^2+2x-4y=12}$ ....**(1)**

Para el segmento $\overline{\mathbf{CA}}$, se tiene:

$$\overline{\mathbf{CA}}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{\mathbf{17}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y desarrollando:

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=17$$

Reduciendo términos semejantes:

$\mathbf{x^2+y^2-4x+2y=12}$ ....**(2)**

Restando miembro a miembro la ecuación **(2)** de la ecuación **(1)**:

$$6x-6y=0$$

Dividiendo entre **6**:

$$x-y=0$$

Por tanto:

$\mathbf{x=y}$ ....**(3)**

Sustituyendo **(3)** en **(1)** y simplificando:

$$x^2+x^2+2x-4x=12$$
$$2x^2-2x-12=0$$
$$x^2-x-6=0$$

Resolviendo:

$\mathbf{x_1=-2}$ y $\mathbf{x_2=3}$

Según la ecuación **(3)**:

$$y_1 = -2 \quad y \quad y_2 = 3$$

Se puede ver que el problema tiene **dos** ***soluciones***:

$$C_1(-2,-2) \quad y \quad C_2(3,3)$$

Lo que se comprueba según la ***Figura 14***.

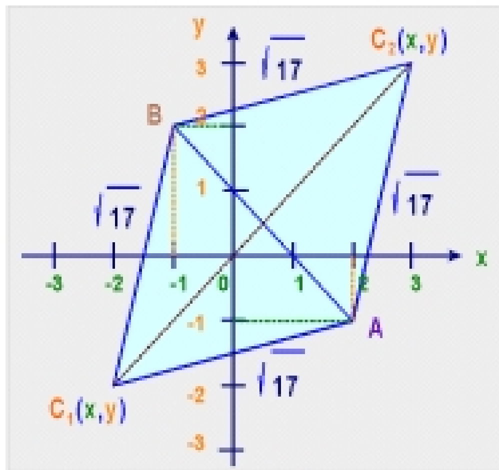

FIGURA 14

Nombre de archivo:	nociones basicas	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	Geometría Analítica	
Asunto:	Nociones básicas de la Geometría Analítica	
Autor:	Ing. Jesús Infante Mutillo	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	11/02/02 08:48 A.M.	
Cambio número:	44	
Guardado el:	13/05/02 10:38 A.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	1,231 minutos	
Impreso el:	13/05/02 10:38 A.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	23
	Número de palabras:	3,182 (aprox.)
	Número de caracteres:	18,138 (aprox.)